

三维旋转层流边界层的计算

北京航空航天大学 祖国君 陈矛章

【摘要】 本文对三维普遍张量形式的边界层方程进行了求解。对旋转及由此引起的 $\partial p / \partial y \neq 0$ 的情况进行了处理, 并提出了一种新的求解 $\partial p / \partial y \neq 0$ 的方程组的方法。对两组旋转边界层的计算及对比分析表明, 本方法可以有效地处理三维旋转边界层的情况, 并具有广泛的适用性。

一、前 言

近期的研究成果表明, 叶轮机械转子叶面上的边界层除了受叶片本身弯曲和压力梯度的影响之外, 旋转产生的离心力和哥氏力带来了更大的附加应变, 改变了叶片表面上的摩擦应力, 加剧了径向流动和叶端潜流。为了提高叶轮机械设计水平及加深对边界层内部机制的认识, 对三维旋转边界层的研究已成为一个重要课题和紧迫任务。Galmes 等人^[1, 2] 以及 Anderson^[3] 的工作都是在假设 $\partial p / \partial y = 0$ 的条件下做的。对于旋转问题, 除了在方程中引入旋转项外, 通常的假设 $\partial p / \partial y = 0$ 已不再适用, 对这一问题需要做进一步的处理^[4]。

作为三维旋转边界层研究工作的第二部分内容, 作者在前一阶段工作的基础上, 又对旋转及由此引出的一些问题进行了研究, 并做了两个算例的对比计算和分析。结果表明, 本方法可以成功地处理三维旋转问题。

二、方程的分析及处理

在文献 [4] 中, 作者在固壁非正交曲线坐标系上, 利用 TSL 假设对 $N \cdot S$ 方程简化, 并经过量级分析, 得到了带有旋转项的三维边界层方程。作为量级分析的结果, 我们注意到, 在现代高速叶轮机中, 垂直于转子叶面方向的压力梯度 ($\partial p / \partial x^2$) 很大, 甚至可达到与 $\partial p / \partial x^1$, $\partial p / \partial x^3$ 同样量级。这样, 通常求解边界层问题所用的假设 ($\partial p / \partial x^2 = 0$) 已不再适用, 由此引出的问题需要另外的处理方法。

对压力项独立处理, 采用与文献 [4] 同样的变换, 得到:

x^1 方向动量方程

$$\begin{aligned} & (bf'')' + m_1 f f'' - m_2 (f')^2 - m_5 f' g' + m_6 f'' g - m_g (g')^2 - m_{25} (cg'')' + m_{13} f' + m_{14} g' + m_{11} \\ & = m_{10} f' (\partial g' / \partial x^1) - f'' (\partial f / \partial x^1) + m_7 g' (\partial f' / \partial x^3) - f'' (\partial g / \partial x^3) \end{aligned} \quad (1)$$

x^3 方向动量方程

$$\begin{aligned} & (bg'')' + m_1 f g'' - m_4 f' g' - m_3 (g')^2 + m_6 g g'' - m_9 (f')^2 - m_{26} (cf'')' - m_{19} g' - m_{20} f' + m_{12} \\ & = m_{10} f' (\partial g' / \partial x^1) - g'' (\partial f / \partial x^1) + m_7 g' (\partial g' / \partial x^3) - g'' (\partial g / \partial x^3) \end{aligned} \quad (2)$$

x^2 方向动量方程

$$\begin{aligned} \partial p / \partial \eta = & (\rho_e \mu_{es1} / W_e)^{1/2} \{ \Omega^2 R \cos(\bar{R}, \bar{e}_2) - (2\Omega W_{ef}' / \sin \theta) [\cos \theta \cdot \cos(\bar{\Omega}, \bar{e}_1) - \cos(\bar{\Omega}, \bar{e}_3)] \\ & - (2\Omega W_{ref} g' / \sin \theta) [\cos(\bar{\Omega}, \bar{e}_1) - \cos \theta \cdot \cos(\bar{\Omega}, \bar{e}_3)] \} \end{aligned} \quad (3)$$

边界条件:

$$\eta = 0 \text{ 时: } f' = g' = f = g = 0; \quad \eta = \eta_\infty \text{ 时: } f' = 1, g' = W_e^3 / W_{ref}, p = p_e \quad (4)$$

其中:

$$\begin{aligned} m_{11} = & \sqrt{1 / (W_e' \sin \theta)^2} \{ \Omega^2 R [\cos(\bar{R}, \bar{e}_1) - \cos(\bar{R}, \bar{e}_3) \cos \theta] \\ & - 1 / (\rho \quad g_{11}) \} (\partial p / \partial \alpha^1) + \sqrt{1 / (\rho \quad g_{33})} \} (\partial p / \partial \alpha^3) \} \\ m_{12} = & \sqrt{1 / (W_e' W_{ref} \sin^2 \theta)} \{ \Omega^2 R [\cos(\bar{R}, \bar{e}_3) - \cos(\bar{R}, \bar{e}_1) \cos \theta] \\ & + \cos \theta (\rho \quad g_{11}) - 1 / (\rho \quad g_{33}) \} (\partial p / \partial \alpha^3) \} \end{aligned}$$

其它系数及各符号的意义见文献 [4]。

三、数值方法

由于 $\partial p / \partial \alpha^2 \neq 0$ ($\partial p / \partial \eta \neq 0$), 使得方程 (3) 不能忽略, 压力 p 已不能作为一个已知参数进行边界层方程的求解。Bradshaw 等人^[5]的工作仅是针对二维情况的。其主要思想是对压力 p 进行 Gauss-Jacobi 迭代或 Gauss-Seidel 迭代。这种方法直观、收敛速度快, 但也存在一些问题。第一, 当外缘压力 p_e 不知道时, 需要用其它方法根据速度分布求出; 第二, 当 p_e 、 W_e' 、 W_e^3 不能很好地满足边界层外缘的动量方程时, 计算容易不收敛; 第三, p_e 值很大, 其数值导数 ($\partial p_e / \partial \alpha^1$)、($\partial p_e / \partial \alpha^3$) 的绝对误差可能会造成计算失稳或失真。基于如上的考虑, 更主要的是我们注意到, 控制方程中的压力都是以导数的形式出现的, 我们采取了对压力导数迭代的办法。

(1) 由边界层外缘的动量方程求得 ($\partial p_e / \partial \alpha^1$) 和 ($\partial p_e / \partial \alpha^3$); (2) 假设全场 ($\partial p / \partial \alpha^1$) = ($\partial p_e / \partial \alpha^1$), ($\partial p / \partial \alpha^3$) = ($\partial p_e / \partial \alpha^3$); (3) 用传统的方法进行边界层计算; (4) 利用边界层计算结果, 由方程 (3) 的变形, 积分求出新的压力分布 ($\partial p / \partial \alpha^1$)、($\partial p / \partial \alpha^3$); (5) 重复过程 (3) 和 (4), 直到收敛到一定的精度为止。这种方法一般只需迭代 3-4 次即可。

在边界层计算的推进过程中, 还需要对起始边界面进行特殊的处理。在起始面上, 如果 $W_e^3 = 0$, 可以用附着线方程或无限后掠翼方程来求解; 如果 $W_e^3 \neq 0$, 附着线方程不再适用, 则需要用无限后掠翼方程求解。

四、计算与结果分析

为考察旋转效应对边界层的影响, 我们计算了两组三维旋转层流边界层的情况, 并对结果进行了分析。

1. 转动平板 见图 1。无粘流场由下面的关系给出:

$$W_e^1 = \Omega y, \quad W_e^3 = -\Omega x \quad (5)$$

Fogarty^[6]在做了大量简化后, 得到了远离根部的相似解。在 $y \gg x$ 处的任一点, 本文计算结果同 Fogarty 的解做了对比。图 2 为速度型的对比结果, 其中的 V_θ 为以 Z 为转轴的周向速度, V_r 为径向速度。两个结果非常接近, 说明本方法在只有离心力作用的旋转问题中是正确的。

图 3 为本文计算得到的极限流线角 β 与文献 [6] 的解析结果的对比情况。其中图 (a) 为 β 随 x 的变化, 图 (b) 为 β 沿 y 方向的变化。从图中可以看到, 两组结果很接近, Fogarty 的解析值略小, 最大相差 1.33%。

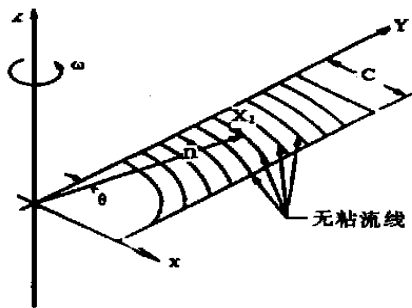


图 1 转动平板

我们注意到, Fogarty 的方法除了普通的边界层假设外, 还忽略了具有 $(c/y)^2$ 量级的项, c 为弦向尺度。这就要求 $(c/y)^2 \ll 1$ 。即使满足了这一条件, 其结果也只相当于级数解法中的一阶近似^[7]。因此, 从方法上来说,

本方法具有先进性。另外, 从结果上看, 本文计算得到的 β 比 Fogarty 的结果略大, 这也正说明了本方法正确地反映了实际存在的三维效应。

2. 旋转螺旋面 在具有均匀流速 U_{FS} 的流场中, 螺旋面以角速度 Ω 转动, 见图 4。面几何参数按如下关系给出:

$$\xi_1 = x \cdot \cos \Phi, \quad \xi_2 = x \cdot \sin \Phi, \quad \xi_3 = Z$$

$$(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 = R^2, \quad \tan \Phi = U_{FS} / \Omega Z \quad (6)$$

Y. Miyake 和 S. Fujita 用级数解法计算了转动螺旋面的边界层^[7]。图 5 为主流及横流方向速度型的对比情况。其中 $\tan \Phi = 0.2$ 。在图 a 中 $l/R = 0.2$, l 为 ξ_1 方向的尺度。图 b 对应 $l/R = 0.3$ 的位置。本文计算结果同文献^[7]的结果吻合得很好, 说明本方法在计算包括哥氏力作用的旋转边界层问题上是成功的。

图 6 反映了壁面摩擦系数的对比情况, 其中图(a)对应 $\tan \Phi = 0.2$ 处, 图 (b) 对应 $\tan \Phi = 0.3$ 处。本结果略大于 Miyake 和 Fujita 的计算值, 最大相差 3.3%。

虽然文献^[7]在方程的处理上没有引入另外的假设, 但由于级数解法的局限性, 它虽能较好地预测速度型 (见图 5), 却存在难以克服的缺点。

(1) 级数的因子 ξ_1/ξ_3 和 β/ξ_3 的大小限制了这种解法的收敛性, 也就是说收敛性要求比较小的 ξ_1/ξ_3 及 β/ξ_3 。 β 为 U_{FS}/Ω 。(2) 对于一定的 ξ_1/ξ_3 和 β/ξ_3 , 虽然可以得到比较准确的速度型, 却很难得到比较精确的壁面摩擦系数^[7]。(3) 只算到四阶, 舍去误差比较大。图 6 中也

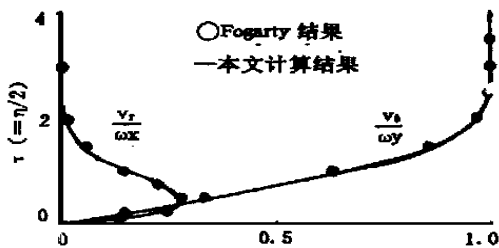


图 2 平板速度型

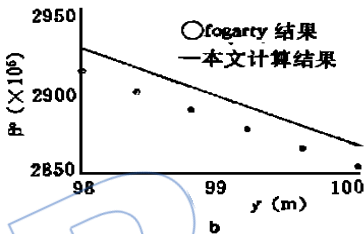
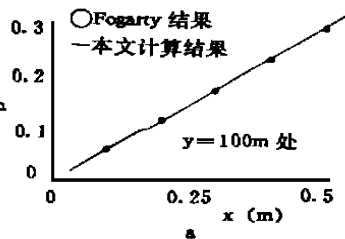


图 3 极限流线角对比结果

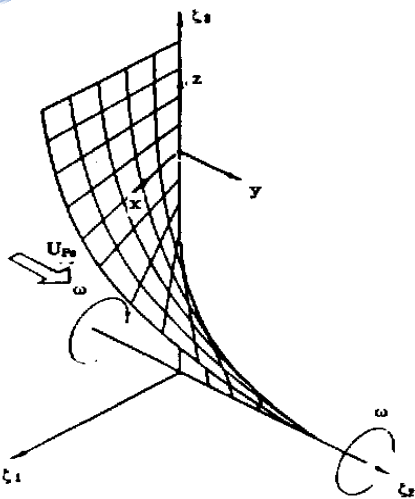


图 4 旋转螺旋面

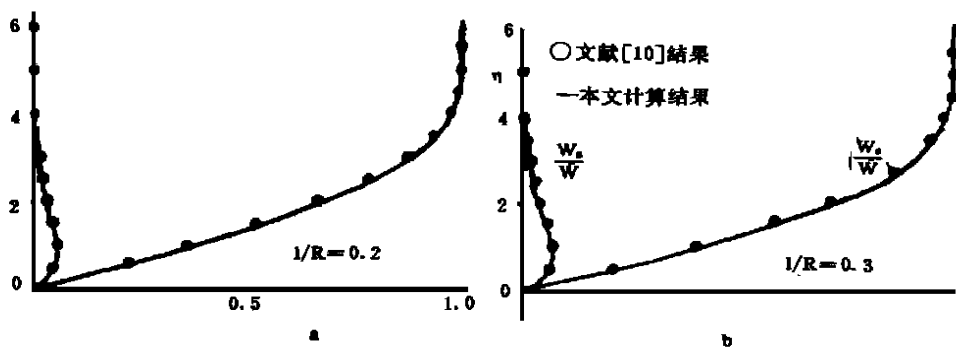


图 5 螺旋面速度型

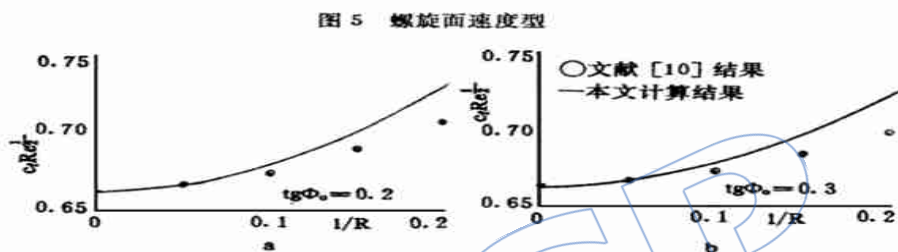


图 6 壁面摩擦系数对比结果

可以看到, 在 l/R 很小处 (相当于 ξ_1/ξ_3), 两个结果很接近; 随着 l/R 增加, 差别也越来越大。从图 6 的 (a)、(b) 对比看, 三维效应比较大的地方, 壁面摩擦系数也较大。这也就说明了本结果更真实地反映了实际存在的三维效应。

结 论: 为了研究三维旋转的复杂边界层, 我们第一阶段的工作中, 正确地预测了没有旋转的情况^[4]。作为第二步工作, 本文计算了两种旋转边界层, 从对比和分析中可以看到: (1) 本方法和程序可以用于三维旋转边界层的计算, 对比结果很好。(2) 由于采用普遍张量形式的微分法, 本方法具有更为广泛的适用性。(3) 本方法和程序计算速度快, 耗时少。(4) 可以处理 $W_e^3 > 0$ 及 $W_e^3 < 0$ 的复杂情况。(5) 引入适当的湍流模型, 本方法和程序可以稍加变动以预测三维旋转湍流边界层。

参 考 文 献

- [1] Galmes, J. M. and Lakshminarayana, B., "Turbulence Modelling for 3-D Shear Flows Over Curved Rotating Bodies", AIAA J. Vol. 22, No. 10, 1984.
- [2] Galmes, J. M., Pouagare, M. and Lakshminarayana, B., "3-D Flow Field Inside a Compressor Rotor, Including Blade Boundary Layers", PSU/Turbo 82-4, 1982.
- [3] Anderson, O. L., "Calculation of 3-D Boundary Layers on Rotating Turbine Blades", J. of Fluids Engineering, Mar. 1987.
- [4] 祖国君、陈矛章, "旋转叶片上的三维附面层", 《航空动力学报》, No. 2, 1988 年。
- [5] Mahgoub, H. E. H. and Bradshaw, P., "Calculation of Turbulent-Inviscid Flow Interactions with Large Normal Pressure Gradients", AIAA J. Oct. 1979.
- [6] Fogarty, L. E., "The Laminar Boundary Layer on a Rotating Blade", J. of Aeronautical Sciences, Vol. 18, No. 4, 1951.
- [7] Miyake, Y. and Fujita, S., "A Laminar Boundary Layer on a Rotating Three-Dimensional Blade", J. of Fluid Mechanics, Vol. 65, Part 3, 1974.

treatment is similar to that of isolated rotor with casing treatment. According to the analysis of downflow, a new flow phenomenon is clarified: the dangerous stall locates at the blade hub and near the pressure surface. The mechanism to extend stability for a hub treatment with circumferential groove is also considered.

CALCULATION OF THREE-DIMENSIONAL LAMINAR BOUNDARY LAYERS ON ROTATING BODIES

Zu Guojun and Chen Maozhang

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

ABSTRACT

The three-dimensional boundary layer equations with rotation terms are formulated in general tensor form. The effects of rotation including $\partial p / \partial y \neq 0$ and its consequence have been investigated. The results show that in some cases it is essential to take $\partial p / \partial y \neq 0$ into account to obtain accurate boundary layer parameters. A new method to solve this equation system is proposed. The method has been verified through several examples, showing its effectiveness and applicability.

INFLUENCE OF DOWNSTREAM DISTORTION ON PERFORMANCE OF AXIAL COMPRESSOR

Hu Jun, Tang Guocai, Zhang Huimin

(Nanjing Aeronautical Institute)

ABSTRACT

The development of a new method to predict the unstalled characteristics and the onset of flow instability is described for an axial compressor operating in a circumferentially distorted downflow. This method adopts the "semi-actuator disk" to replace the blade rows of the compressor and the downstream distorting component, and assumes the flow fields outside the disks to be two-dimensional, ideal, compressible and unsteady. The effects of total pressure distortion coefficient and spacing between the compressor and the distorting component on the performance of a compressor have been investigated in detail by means of this method. It is found that the losses of both pressure rise and axial flow coefficient at instability increase linearly with the distortion coefficient, this conclusion is similar to that for the inlet flow distortion. And the spacing has crucial effect on the losses of both pressure rise and axial flow coefficient too.

AERODYNAMICAL DESIGN FOR SMALL GASTURBINES

Shi Jing and Han Jianyuan

(Nanhua Powerplant Institute)

ABSTRACT

The advanced small gasturbines feature small mass flow ratio, short vanes and blades with low aspect, high second flow and blade tip leakage losses, and low efficiency. According to the detail investigation on the advanced small gas turbines, some technical design approaches for improving the efficiency of a small gasturbine, such as vanes with meridional-plane contraction contour, compounded leaned vanes and blades, small blade shroud and so on.